Chapitre 8. Anneaux et corps

1 Anneaux

1.1 Généralités

Définition 1.1. Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$ tels que :
- $(A, +)$ est un groupe abélien, noté additivement (en particulier, son élément neutre est noté 0_A)
- La loi $\cdot$ est associative et possède un élément neutre 1_A
- La loi $\cdot$ distribue sur l'addition : $\forall x, y, z \in A : \begin{cases} x(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{cases}$

Un anneau est dit commutatif si sa multiplication est commutative.

1.2 Règles de calcul

Proposition 1.2.
- 0_A est absorbant : $\forall a \in A, 0_A \cdot a = a \cdot 0_A = 0_A$
- (règle de signes) : $\forall a, b \in A, (-a)b = -(ab) = a \cdot (-b)$ (où $(-a)$ est l'opposé de a pour la loi $+$)

Théorème 1.3. Soit A un anneau et $a, b \in A$ tels que $ab = ba$ (a, b commutent)
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{(Binôme de Newton)} \\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \end{cases}$$

1.3 Groupe des inversibles

Définition 1.4. Soit A un anneau.
Le groupe des inversibles (ou des unités) de A est $A^\times = \{x \in A \mid \exists y \in A : xy = yx = 1_A\}$
Comme son nom l'indique, $(A^\times, \cdot)$ est un groupe.

1.4 Sous-anneaux

Définition 1.5. Soit A un anneau.
Un sous-anneau de A est une partie B de A telle que :
- B soit un sous-groupe de $(A, +)$
- B soit stable par $\cdot$ et $1_A \in B$

Proposition 1.6. Soit A un anneau et $B \subseteq A$
Pour que B soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que :
- $1_A \in B$
- $\forall x, y \in B, x - y \in B$
- $\forall x, y \in B, xy \in B$

1.5 Morphismes d'anneaux

Définition 1.7. Soit A, B deux anneaux.
Un morphisme (d'anneaux) $f : A \to B$ est une application telle que :
- $\forall x, y \in A, f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f morphisme de groupes additifs)
- $f(1_A) = 1_B$
- $\forall x, y \in A, f(xy) = f(x)f(y)$

Proposition 1.8. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
Alors $\mathrm{im}(f)$ est un sous-anneau de B

2 Corps

2.1 Anneau intègre

Définition 2.1. Un anneau A est dit intègre s'il est commutatif, non nul (différent de l'anneau nul : $0_A \neq 1_A$) et que $\forall x, y \in A, xy = 0_A \implies (x = 0_A \text{ ou } y = 0_A)$

Proposition 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi n est premier.

3 Corps : généralités

Définition 3.1. Un corps est un anneau commutatif, non nul, et dans lequel tout élément non nul est inversible.

Proposition 3.2. Tout anneau intègre fini est un corps.

Définition 3.3. Soit L un corps.
Un sous-corps de L est un sous-anneau K de L tel que $\forall x \in K \setminus \{0\}, x^{-1} \in K$
On dit aussi que L est un sur-corps de K ou que L/K est une extension de corps.

Définition 3.4. Soit K_1, K_2 deux corps.
Un morphisme de corps $K_1 \to K_2$ est un morphisme d'anneaux $K_1 \to K_2$

Proposition 3.5. Tout morphisme de corps est injectif.

3.1 Caractéristique d'un corps

Définition 3.6. La caractéristique $\mathrm{car}(K)$ d'un corps K est l'ordre de 1_K dans le groupe additif $(K, +)$ s'il est fini, et 0 sinon.

Théorème 3.7. Soit K un corps.
* Si K est de caractéristique non nulle, alors sa caractéristique est un nombre premier, et K continent un sous-corps isomorphe à $\mathbb{F}_p$
* Si K est de caractéristique nulle, il contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$

3.2 Corps des fractions d'un anneau intègre

On va construire un corps de fractions $\mathrm{Frac}(A)$ "contenant A".
L'ensemble $\mathrm{Frac}(A)$ est le quotient de $A \times (A \setminus \{0\})$ par la relation $\sim$ définie par
$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times (A \setminus \{0\}), (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$
dont on vérifie que c'est une relation d'équivalence.
On note simplement $\frac{a}{b}$ le classe d'équivalence de $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$
On munit alors $K = \mathrm{Frac}(A)$ de deux lois :

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$
$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$$

(avec $b_1 b_2 \neq 0_A$)